

氏 名	祁 艶
授与した学位	博 士
専攻分野の名称	理 学
学位授与番号	博甲第4952号
学位授与の日付	平成26年 3月25日
学位授与の要件	自然科学研究科 先端基礎科学専攻 (学位規則第5条第1項該当)
学位論文の題目	同変実射影空間の標準直線束の研究
論文審査委員	教授 森本 雅治    教授 島川 和久    准教授 鳥居 猛

### 学位論文内容の要旨

空間  $X$  の各点  $x$  にベクトル空間を付随させ、そのベクトル空間の集まりが  $X$  上のベクトル束と呼ばれる。従って、ベクトル束は空間の性質を調べるひとつの道具である。直積束、多様体の接束、実射影空間の標準直線束などがベクトル束としてよく知られている。また実射影空間上の接束は標準直線束と直積束により得られる。

群作用を考えない時、実射影空間の簡約  $K$ -群は巡回群と同型であり、生成元は標準直線束に関連している。従って、実射影空間上の標準直線束を調べることにより、実射影空間上の接束と実射影空間の簡約  $K$ -群の性質がわかる。

$G$  を有限群とし、 $S(U)$  は  $U$  の  $G$ -不変な内積に関する単位球面を表し、 $P(U)$  は同変実射影空間を表す。ここで  $U$  を有限次元の実  $G$ -加群とする。このとき  $M = P(U)$  上の標準直線束と接束において次の結果が得られる。

(1)  $G$  は偶数位数巡回群のとき、偶数位数の自明ではない実  $G$ -加群  $V$  について、 $G$  は  $V$  に原点以外に自由に作用するものとする。また  $R$  は自明な  $G$ -作用を持つ実ベクトル空間とする。すると  $R$  と  $V$  の直和  $R \oplus V$  の同変実射影空間  $M$  について、任意の自然数  $m$  に対して、 $M$  上の標準直線束と接束はそれぞれ  $M$  の同変簡約  $K$ -群の元として  $m$  倍しても自明ではない。

(2)  $G$  は奇数位数巡回群のとき、 $V$  を位数  $2$  の自明ではない実  $G$ -加群とし、 $G$  は  $V$  に原点以外に自由に作用するものとする。また  $R$  は自明な  $G$ -作用を持つ実ベクトル空間とする。すると  $R$  と  $V$  の直和  $R \oplus V$  の同変実射影空間  $M$  について、 $M$  上の標準直線束と接束はそれぞれ  $M$  の同変簡約  $K$ -群の元として  $4$  倍したら零である。

本論文では、上の(2)を一般化して次を証明する。

$G$  を奇数位数の有限群とし、 $V$  を  $n$  個の  $1$ -次元複素  $G$ -加群の直和とする。また  $V_R$  を  $V$  の実化とし、 $M$  を自明な  $G$ -作用を持つ実ベクトル空間  $R$  と  $V$  の直和  $R \oplus V$  の同変実射影空間とする。このとき、 $M$  上の標準直線束の  $2^{n+1}$  乗ホイトニー和の複素化は自明な複素  $G$ -ベクトル束である。従って、 $M$  の同変簡約  $K$ -群の元として  $M$  上の標準直線束の  $2^{n+2}$  倍は自明である。

実射影空間はディスクとメビウスの帯を境界で貼り合わせることで得られる。ディスク上とメビウスの帯上のそれぞれの標準直線束の自明性を調べるのは容易であるが、貼り合わせた空間上の標準直線束の自明性を調べるのはキーポイントとなる。それを知るために、Eilenberg の拡張定理が使われ、拡張障害類を調べる必要がある。また拡張障害類はあるコホモロジー群に属する。Serre スペクトル系列を用い計算した結果はそのコホモロジー群のトップ次元が位数  $2$  の巡回群で、ほかはすべて零である。この結果により、貼り合わせた空間上の標準直線束の  $2^{n+1}$  乗ホイトニー和の複素化は自明な複素  $G$ -ベクトル束であるとわかる。

## 論文審査結果の要旨

実射影空間  $\mathbf{R}P^n$  は多様体の中でもとりわけ基本的であり、 $\mathbf{R}P^{2m}$  は閉多様体のコボルディズム環  $\mathcal{M}_*$  の偶数次元の生成元である。多様体上の群作用の研究においても、有限群の実射影空間上の作用の研究は重要である。実射影空間上の群作用としては、群の実（線形）表現空間  $V$  から得られる  $P(V)$  が標準モデルである。ここで  $P(V)$  は  $V$  の1次元線形部分空間の全体を表す。多様体  $M = P(V)$  の接ベクトル束  $T(M)$  と  $M$  の標準直線束  $\gamma_M$  の間には自然な同型  $T(M) \oplus \varepsilon_M(\mathbf{R}) \cong \gamma_M \otimes V$  があり、したがって  $M = P(V)$  の特性は標準直線束  $\gamma_M$  を通して把握できる。ここで  $\mathbf{R}$  は実数体あるいは  $G$  が自明に作用する1次元実表現空間、また  $\varepsilon_M(F)$  は底空間  $M$ 、ファイバー  $F$  の積束を表す。

学位申請者 祁 艶 氏はこの背景に基づき、有限群  $G$  が「線形」に作用する実射影空間  $M$  の標準直線束  $\gamma_M$  について研究し、次の結果を学位論文の主定理とした。

**定理.**  $G$  が奇数位数の有限群で、複素  $G$ -表現空間  $V$  が1次元の既約表現の直和に分解できるとき、 $M = P(\mathbf{R} \oplus V_{\mathbf{R}})$  に対して複素ベクトル束としての同型

$$\gamma_M^{\otimes m} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong \varepsilon_M(\mathbf{C}^m)$$

が成り立つ。ここで  $n = \dim_{\mathbf{C}} V$ ,  $m = 2^{n+1}$ ,  $V_{\mathbf{R}}$  は  $V$  を実表現空間とみなしたもの、また  $\mathbf{C}$  は複素数体あるいは  $G$  が自明に作用する1次元複素表現空間である。

祁 艶 氏は Steenrod の障害理論を用い、あるファイバー束のコホモロジー群の計算に帰着させ、さらに Serre のスペクトル系列を用いてその(コ)ホモロジー群の計算を行い、それらを総合して主定理を証明した。また参考論文の1編は Math. J. Okayama Univ. に掲載され、別の1編は同誌に受理されている。これらは祁 艶 氏の障害理論とスペクトル系列の理解と応用が卓越したものであり、博士論文における研究成果が高水準のものであることを示している。

以上の理由により、学位審査委員会は 祁 艶 氏が優れた研究能力を有すると認め、岡山大学から博士（理学）の学位を受けるに相応しいと判定する。